Tema 1: LA INTERACCIÓN GRAVITATORIA

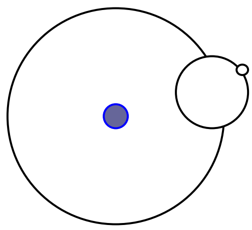
Evolución de los modelos planetarios. Leyes de Kepler

Para empezar el estudio de la interacción gravitatoria recordaremos cuál ha sido la evolución, a lo largo del tiempo, en el pensamiento acerca del movimiento de los planetas y otros cuerpos celestes.

Sistema del mundo de Ptolomeo

Apoyado en las ideas de Aristóteles (siglo IV a.C.), Ptolomeo (siglo II) propone un modelo de universo que se mantiene hasta el siglo XVI y que se basa en:

- La Tierra se encuentra inmóvil en el centro del universo (geocéntrico).
- Todos los cuerpos celestes se mueven alrededor de la Tierra.
- El movimiento de los cuerpos celestes tiene lugar por circunferencias a velocidad constante.
- Los planetas se mueven por circunferencias denominadas *epiciclos*, cuyos centros se desplazan por otras circunferencias, llamadas *deferentes*, con centro en la Tierra. Se explica así el movimiento directo y retrógrado de estos "cuerpos errantes".



- El Sol y la Luna se mueven por circunferencias deferentes, sin epiciclos.
- de una esfera, en cuya superficie están situadas las estrellas inmóviles.
- El movimiento diurno de todos los astros se debe a la rotación del universo, como un todo, alrededor de la Tierra inmóvil.

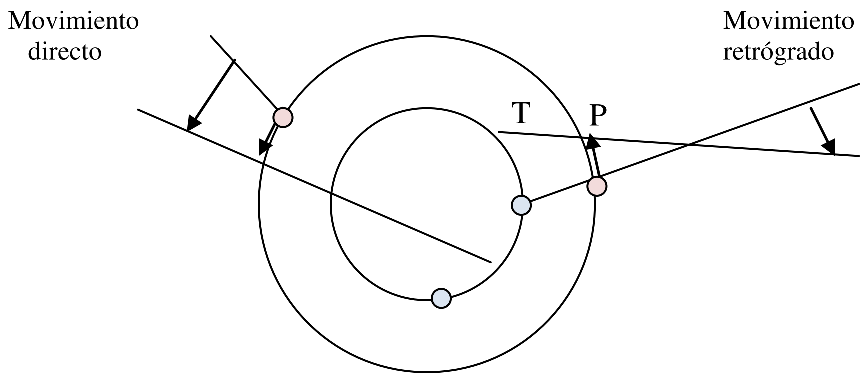
El aumento en la precisión de las observaciones trajo divergencias con la teoría, que se trataban de explicar con la introducción de nuevos epiciclos y el sistema de Ptolomeo se tornó cada vez más complicado y menos eficaz en las necesidades diarias, sobre todo en navegación.

Sistema del mundo de Copérnico

En 1543 el sabio polaco Nicolás Copérnico publica la obra de toda su vida en la que se establecen los principios de una nueva astronomía. El sistema del mundo creado por él se denomina heliocéntrico y se basa en:

- En el centro del universo se encuentra el Sol y no la Tierra.

- La Tierra esferoidal gira alrededor de su eje y esta rotación explica el movimiento diurno de todos los astros.
- La Tierra, al igual que los demás planetas, gira alrededor del Sol y esto explica el movimiento aparente del Sol entre las estrellas.
- Los movimientos aparentes, directos y retrógrados, de los planetas no pertenecen a éstos sino a la Tierra:



El sistema de Copérnico supone, además de una revolución científica, una revolución en el pensamiento humano y en la concepción del mundo. Liberó a la Ciencia de las tradiciones que frenaban su desarrollo.

Galileo (1564-1642), que observó las fases de Venus, los satélites de Júpiter y realizó múltiples contribuciones al mundo científico, fue un gran defensor de la teoría de Copérnico, a pesar de verse obligado a renunciar a ella por parte de la Inquisición.

Partidario de la teoría de Copérnico, Kepler (1571-1630) se planteó como objetivo el perfeccionar el sistema de aquél con las observaciones de Marte que, en el transcurso de veinte años, había realizado el astrónomo danés Tycho Brahe. Después de cálculos que duraron muchos años, renunció al concepto equivocado respecto a la forma circular de los movimientos planetarios y enunció sus famosas leyes.

Leyes de Kepler:

1. Todos los planetas se mueven por órbitas elípticas en uno de cuyos focos (común para todos) se encuentra el Sol.
2. El radio vector de cada planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. Se dice también que la velocidad areolar de cada planeta es constante.
3. Los cuadrados de los periodos sidéreos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas:

$$T^2 = Ka^3$$

Ejercicio 1. El semieje mayor de la órbita terrestre es 149,6.10^6 km. sabiendo que el periodo sidéreo de revolución de Marte es 687 días, ¿cuánto mide el semieje mayor de la órbita de Marte?

Ley de Newton de la gravitación universal

Una vez establecidas por Kepler las leyes del movimiento planetario se planteó el problema de encontrar las causas de estos movimientos. Aparece en escena Newton (1642-1727) quien ya había formulado sus famosas leyes de la Mecánica.

Para entender cómo llega a la ley de gravitación, empezaremos por recordar algunos conceptos.

Momento angular. Fuerzas centrales

Se define el momento angular $\vec{L}$ de una partícula de masa m que se desplaza con velocidad $\vec{v}$ como el producto vectorial siguiente: $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$, donde $\vec{r}$ es el vector de posición de la partícula y $\vec{p} = m\vec{v}$ su momento lineal o cantidad de movimiento.

Es una magnitud que depende del sistema de referencia y, al definirse como un producto vectorial, cumple:

- La dirección de $\vec{L}$ es perpendicular al plano que determinan los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ (o $\vec{r}$ y $\vec{v}$).
- El sentido de $\vec{L}$ puede determinarse por la regla del sacacorchos.
- El módulo de $\vec{L}$ viene dado por: $L = mrvsen\alpha$.

Ejercicio 2. Calcula el momento angular, respecto al origen de coordenadas, de una partícula de 3 kg de masa que se encuentra en el punto (4, 1) y se mueve con una velocidad $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

Vamos a ver, a continuación, en qué circunstancias se conserva, o permanece constante, el momento angular de un cuerpo. Para ello, derivamos respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \wedge \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} \; + \; \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \wedge \vec{p} \; + \; \vec{r} \wedge \vec{F}$$

y teniendo en cuenta que velocidad y momento lineal son paralelos y la definición de momento de una fuerza, nos queda:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

que nos indica que la variación del momento angular de un cuerpo se debe a los momentos de las fuerzas que actúen sobre él.

Si el momento resultante es cero, $\vec{M} = 0$, entonces $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ y $\vec{L}$ es constante (no depende del tiempo).

Como $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ su valor será nulo si:

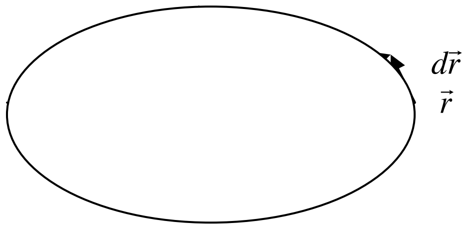
- $\vec{F} = 0$, en cuyo caso el cuerpo no está sometido a fuerzas y su movimiento es rectilíneo y uniforme.

- $\vec{r}$ y $\vec{F}$ tienen la misma dirección. Se denominan fuerzas centrales ya que están dirigidas a un punto fijo, que se toma como referencia. Son muy importantes en la naturaleza.

La conservación del momento angular significa que el vector $\vec{L}$ es constante y no cambia de dirección, por lo que la partícula se mueve siempre sobre el mismo plano (perpendicular a $\vec{L}$).

¿Cómo llega Newton a la ley de Gravitación?

- De la 2ª ley de Kepler deduce que el Sol debe ser el asiento de las fuerzas que gobiernan el movimiento de los planetas:



El área barrida por el radio vector en un tiempo muy pequeño es:

$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \wedge d\vec{r}\right|$$

La velocidad areolar se puede expresar como la derivada del área barrida respecto al tiempo:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \wedge \vec{v}\right| = \frac{\left|\vec{L}\right|}{2m}$$

Si la velocidad areolar es constante, el momento angular es constante y, por tanto, la fuerza que actúa sobre el planeta es una fuerza central.

El valor constante de $\vec{L}$ asegura que la trayectoria esté contenida en un plano.

- A partir de la 3ª ley de Kepler deduce que la fuerza que actúa sobre cada planeta varía inversamente con el cuadrado de la distancia. (*Se puede realizar como ejercicio).*

- Conoce la fuerza que la Tierra ejerce sobre todos los objetos y que les comunica una aceleración en caída libre de 9,81 m/s^2. Si suponemos que esta fuerza varía con el inverso del cuadrado de la distancia entre el cuerpo y el centro de la Tierra, entonces la Luna que se encuentra a una distancia $60R_T$ deberá experimentar una aceleración 60^2 veces menor que un cuerpo en la superficie terrestre, es decir:

$$g_L = \frac{g}{60^2} = \frac{981}{3600} = 0{,}27\ \frac{cm}{s^2}$$

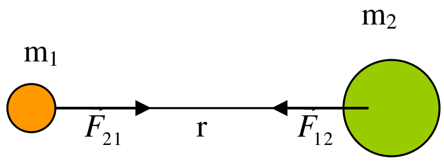
Por otra parte, de las leyes de la Mecánica y del periodo de revolución (27,3 días), se deduce que la aceleración centrípeta de la Luna es:

$$a_n = w^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} 60 R_T = 0{,}27 \frac{cm}{s^2}$$

La fuerza que mantiene a la Luna en órbita no es más que la atracción terrestre.

Todo ello le lleva a la generalización de que todos los cuerpos se atraen entre sí y a la propuesta de la ley de gravitación universal:

"La interacción gravitatoria entre dos cuerpos puede expresarse mediante una fuerza de atracción, central, proporcional a las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que les separa".



$$\vec{F} = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\vec{u}_r$$

Las fuerzas son iguales y de sentido contrario. Si $\vec{F}$ representa la fuerza que el cuerpo 1 ejerce sobre el 2, $\vec{u}_r$ es un vector unitario dirigido de 1 a 2.

G es la constante de gravitación universal, determinada por primera vez por Cavendish. Es independiente del medio y su valor es $G = 6{,}67.10^{-11}$ Nm/kg^2

La expresión de la fuerza escrita anteriormente es válida sólo para masas puntuales, concepto teórico que supone la masa del cuerpo concentrada en un punto, o para distribuciones esféricas de masa en puntos exteriores.

Ejercicio 3. Una masa puntual de 100 kg se encuentra en (4,0) y otra de 1000 kg en (0,-3).

a) Calcula el vector fuerza sobre cada una.

b) ¿Cuál es la fuerza sobre una masa de 10 kg que se coloque en (0,0)?

El campo gravitatorio

La acción a distancia entre cuerpos ha resultado siempre difícil de explicar. Faraday introdujo el concepto de campo como mediador en las interacciones de los cuerpos. Cada cuerpo perturba de alguna manera el espacio que le rodea, de tal manera que otro cuerpo colocado allí estará sometido a la acción del primero. Esa perturbación constituye el campo. Actualmente, las interacciones (fuerzas) de la naturaleza se describen mediante el intercambio de partículas mediadoras denominadas bosones.

Campos escalares y vectoriales

Para definir de una manera operativa el concepto de campo se utilizan magnitudes que toman valores determinados en cada punto del espacio y en el tiempo.

En una región del espacio hay un *campo* cuando en cualquier punto de la región existe una cierta magnitud física que es función de las coordenadas de dicho punto.

Si la magnitud física queda determinada por un número en cada punto, decimos que existe un *campo escalar*. Ejemplos: la temperatura en los distintos lugares de la Tierra en un instante dado, la densidad de la atmósfera y en general aquellos que quedan determinados por funciones escalares de las coordenadas.

Dentro de un campo escalar Φ se denominan *superficies de nivel o equiescalares* al conjunto de puntos donde Φ toma el mismo valor. Para cada uno de los distintos valores tendremos una superficie de nivel. Por ejemplo en el campo de densidades atmosféricas, las superficies de nivel serían superficies esféricas.

Si la magnitud física está representada por un vector (módulo, dirección y sentido) en cada punto, se dice que existe un *campo vectorial*. Son vectoriales los campos de velocidades, de fuerzas (eléctrico, gravitatorio, etc.), y en general aquellos determinados por funciones vectoriales de las coordenadas.

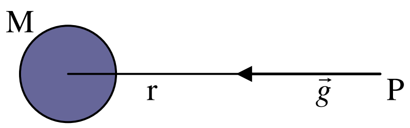
Dado un campo vectorial, a las líneas que en cada punto son tangentes al vector campo se les denomina *líneas de campo*. Por ejemplo las líneas de corriente en el campo de velocidades de las aguas de un río.

¿Cómo se define de manera operativa el campo gravitatorio?

A través de una magnitud vectorial denominada intensidad del campo gravitatorio.

Se define la intensidad del campo gravitatorio, $\vec{g}$, creado por la masa M en un punto del espacio P, como la fuerza por unidad de masa colocada en P.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$



El campo gravitatorio tiene dimensiones de aceleración. En el S.I. se mide en N/kg°, que es equivalente a ms^{-2}.

La fuerza que actúa sobre una partícula de masa m en un punto donde existe un campo gravitatorio $\vec{g}$ se expresa: $\vec{F} = m\vec{g}$

Para el caso de masas puntuales, o distribuciones esféricas en puntos exteriores, el valor de la fuerza viene dado por la ley de Newton:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G\dfrac{Mm}{r^2}\vec{u}_r}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

Como se observa, el campo gravitatorio creado por M no depende de m lógicamente.

Ejercicio 4. Una masa puntual de 100 kg se encuentra en el origen de coordenadas. Determina el vector intensidad del campo gravitatorio en los puntos A(3,4) y B(-6, 8).

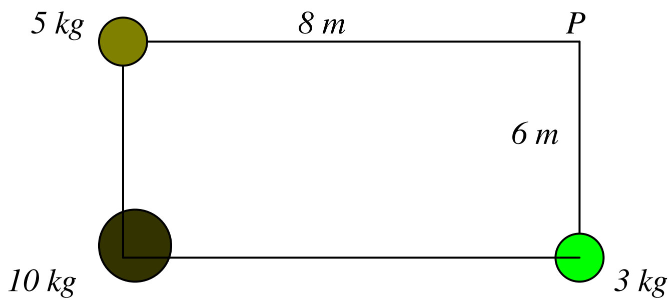
Ejercicio 5. Una masa puntual de 300 kg se encuentra fija en el punto P(4,-3). Determina el campo gravitatorio en los puntos A(-2,5) y B(7,1).

El campo creado por un conjunto de masas se obtiene aplicando el principio de superposición, que nos dice que el campo resultante en un punto P es la suma de los campos que en ese punto crearía cada masa si estuviese sola:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \ldots\ldots\vec{g}_n$$

Se debe tener en cuenta que se trata de una suma de vectores.

Ejercicio 6. Determina el campo creado en P por la distribución de masas de la figura:



Las fuerzas gravitatorias son conservativas

Ya hemos mencionado algunas de las características de las fuerzas gravitatorias: son de largo alcance ya que varían según $1/r^2$, son centrales, independientes del medio. Veamos ahora otra de sus características, para lo cual, empezaremos por el concepto de trabajo de una fuerza.

<u>Trabajo y energía cinética</u>

Para el caso general en que las fuerzas dependen de la posición se define el trabajo de la siguiente manera:

$$W = {}_c\int_A^B \vec{F}d\vec{r}$$

W es el trabajo que realiza la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre un cuerpo entre los puntos *A* y *B* a lo largo de la curva *C*.

Como se observa en la definición, el trabajo depende no sólo de la intensidad de la fuerza y de la longitud de la trayectoria, sino también de la orientación relativa del vector fuerza respecto al desplazamiento (tangente en cada punto), como indica el producto escalar de ambos. Depende, por tanto, de la trayectoria seguida entre *A* y *B*.

Sólo en el caso de que la fuerza sea constante, es decir, no dependa de la posición, se puede escribir:

$$W = \vec{F}\left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right) = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos\vartheta$$

siendo ϑ el ángulo entre los vectores fuerza y desplazamiento.

Sea una partícula que se mueve sometida a la fuerza $\vec{F}$ entre los puntos *A* y *B*. El trabajo realizado será:

$$W = \int_A^B \vec{F}d\vec{r} = \int_A^B m\vec{a}d\vec{r} = m\int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = m\int_A^B \vec{v}d\vec{v}$$

ahora bien, $d(\vec{v}\vec{v}) = dv^2 = d\vec{v}.\vec{v} + \vec{v}.d\vec{v} = 2\vec{v}d\vec{v}$, es decir, $\vec{v}d\vec{v} = \frac{1}{2}dv^2$ y el trabajo lo podemos expresar:

$$W = \frac{1}{2}m\int_A^B dv^2 = \frac{1}{2}mv^2\Big]_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$W = \Delta E_C = E_{CB} - E_{CA}$$

A la expresión que hemos deducido se le denomina *teorema trabajo-energía cinética o de las fuerzas vivas,* e indica que el trabajo efectuado sobre una partícula <u>por todas las fuerzas que actúan sobre ella</u> es igual al cambio producido en su energía cinética.

Ejercicio 7. La fuerza, ejercida por los gases de la explosión, que actúa sobre un proyectil de 20 g mientras se encuentra en el interior de un cañón, de 1 m de longitud, es F = 1000(2-x), expresada en el S.I. Calcular el trabajo que realiza y la velocidad del proyectil al salir del arma.

<u>Fuerzas conservativas. Energía potencial</u>

Se dice que una fuerza es conservativa cuando el trabajo realizado por ella, actuando sobre un cuerpo, entre dos puntos cualesquiera es independiente del camino seguido:

$$_c\int_A^B \vec{F}d\vec{r} = {}_c\int_A^B \vec{F}d\vec{r} \Leftrightarrow \vec{F} \text{ es conservativa}$$

Es fácil ver que el trabajo a través de trayectorias cerradas es nulo cuando se trata de fuerzas conservativas.

Como el trabajo no depende del camino, a cada par de puntos A y B va asociado un valor escalar (el trabajo entre dichos puntos) que llamamos diferencia de energía potencial. Es decir a cada de fuerza conservativa se le puede asociar una energía potencial, relacionada con el campo por la expresión: $\int_A^B \vec{F}d\vec{r} = Ep_A - Ep_B$

Por tanto, el trabajo realizado por fuerzas conservativas se puede expresar como una diferencia de energía potencial:

$$W = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B$$

Queda determinada de esta manera la diferencia de energía potencial entre dos puntos; para referirnos a la energía potencial de una partícula en un punto deberemos establecer previamente un origen, arbitrario, de energía potencial. La introducción del signo menos al establecer la función energía potencial queda justificada ya que de esta manera, el trabajo realizado por el campo es positivo cuando la partícula pasa de los puntos de mayor a menor energía potencial, es decir, las fuerzas conservativas tienden a llevar a las partículas de los puntos de mayor a menor energía potencial.

Las fuerzas gravitatoria y electrostática son ejemplos de fuerzas conservativas; a cada una le corresponde una energía potencial. El trabajo realizado en contra de estas fuerzas conlleva un aumento de la energía potencial, pudiendo ser devuelto por el campo (conservativo). El trabajo realizado en vencer otro tipo de fuerzas, por ejemplo las de rozamiento, nunca se puede recuperar; son fuerzas no conservativas, no tienen función potencial y el trabajo realizado por las mismas depende del camino seguido.

Ejercicio 8. Determinar la energía potencial asociada al campo de fuerzas conservativas:

$$\vec{F} = -kx\vec{i} \quad \textit{(fuerzas elásticas)}$$

Energía potencial gravitatoria

Vamos a calcular la expresión para la energía potencial de una masa m colocada en un campo gravitatorio creado por M:

$$Ep_A - Ep_B = \int_A^B \vec{F}d\vec{r} = \int_A^B m\vec{g}d\vec{r} = \int_A^B -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r d\vec{r} = \int_A^B -G\frac{Mm}{r^2}dr = -GMm\int_A^B \frac{1}{r^2}dr = -GMm\left(-\frac{1}{r}\right)_A^B =$$

$$= GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

La expresión obtenida nos da la diferencia de energía potencial de la masa m entre los puntos A y B.

Para hablar de energía potencial de una masa en un punto determinado hay que establecer un origen de energía potencial. Dado que para puntos muy alejados de M los efectos del campo gravitatorio (creado por M) son nulos, parece lógico asignar energía potencial cero a masas colocadas a distancia infinita de la que crea el campo:

Si $r_B \to \infty \quad Ep_B = 0$ entonces $Ep_A = -G\dfrac{Mm}{r_A}$

En conclusión, para masas puntuales y tomando cero en el infinito, la energía potencial de una masa m dentro del campo creado por M, se expresa:

$$Ep = -G\frac{Mm}{r}$$

Se mide en julios en el S.I.

El significado físico de la energía potencial es el siguiente: la diferencia de energía potencial de una masa m entre dos puntos A y B representa el trabajo que realiza el campo gravitatorio cuando m se desplaza desde A hasta B.

$$Ep_A - Ep_B = \int_A^B \vec{F}d\vec{r}$$

Si B es el infinito, sabemos que la energía potencial es cero (por convenio). La energía potencial de una masa m en un punto A coincide con el trabajo que realiza el campo cuando m se desplaza desde A hasta el infinito.

$$Ep_A = \int_A^\infty \vec{F}d\vec{r}$$

El potencial gravitatorio

Es un concepto que va asociado al campo, campo conservativo, y representa la energía potencial por unidad de masa. La diferencia de potencial entre dos puntos A y B dentro de un campo gravitatorio será:

$$V_A - V_B = \frac{Ep_A - Ep_B}{m} = \frac{1}{m}\int_A^B \vec{F}d\vec{r} = \int_A^B \vec{g}d\vec{r}$$

Para masas puntuales (o distribuciones esféricas en puntos exteriores) y teniendo en cuenta los cálculos del apartado anterior, se puede escribir:

$$V_A - V_B = GM\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

y tomando potencial nulo en el infinito, nos queda la expresión para el potencial en un punto:

$$V = -G\frac{M}{r}$$

Para determinar el potencial debido a un conjunto de masas aplicaremos el principio de superposición.

El significado físico del potencial es el mismo que el de la energía potencial pero refiriéndonos siempre a la unidad de masa.

$\vec{g}$ y V están asociados a puntos del espacio, $\vec{F}$ y Ep están asociados a masas colocadas en esos puntos.

Resumiendo, para el caso de masas puntuales (o esféricas en puntos exteriores) y tomando el infinito como origen (cero) de potencial, tenemos:

Campo creado por M	Fuerza sobre m (y sobre M)	Relación
$\vec{g} = -G\dfrac{M}{r^2}\vec{u}_r$	$\vec{F} = -G\dfrac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$	$\vec{F} = m\vec{g}$
Potencial creado por M	Energía potencial de m	Relación
$V = -G\dfrac{M}{r}$	$Ep = -G\dfrac{Mm}{r}$	$Ep = mV$
Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria sobre m cuando se desplaza entre A y B		
$W = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B = m(V_A - V_B)$		

Ejercicio 9. En el origen de coordenadas hay una masa puntual M =1000 kg. Determina:

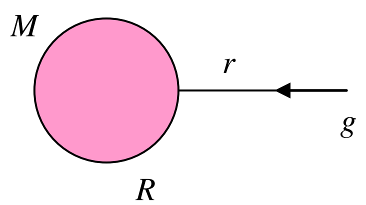
a) El campo gravitatorio y el potencial en el punto A(-8,6).
b) La fuerza que actúa sobre una masa m=20 kg colocada en A.
c) La energía potencial de la masa m colocada en A.
d) El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando m se desplaza entre A y B(4,0).

Ejercicio 10. Cada uno de los cuatro vértices de un cuadrado, de 1 m de lado, está ocupado por una masa puntual de 100 kg. Determina:

a) El campo gravitatorio en el centro del cuadrado.
b) El potencial en el centro.
c) El trabajo mínimo necesario para traer una masa de 10 kg desde el infinito al centro del cuadrado.

El campo gravitatorio terrestre

Considerando la Tierra una esfera homogénea, válido si no se es muy riguroso, y refiriéndonos a puntos exteriores, podemos aplicar los resultados anteriores.



$$g = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M}{(R+h)^2} \quad \textit{(módulo de g)}$$

Donde R es el radio de la Tierra y h la altura sobre su superficie.

Para la superficie terrestre el valor del módulo del campo gravitatorio quedaría:

$$g_0 = G\frac{M}{R^2} = 6{,}67.10^{-11}\frac{5{,}98.10^{24}}{\left(6370.10^3\right)^2} = 9{,}8\ Nkg^{-1}$$

Para el potencial y para la energía potencial utilizaremos las expresiones obtenidas anteriormente para cuerpos esféricos.

No se tendrán en cuenta otros efectos que influyen en el valor efectivo de g, como la rotación de la Tierra, etc.

Ejercicio 11 Obtener la expresión $g = \dfrac{g_0}{\left(1+\dfrac{h}{R}\right)^2}$ *que nos indica cómo varía g con la altura. ¿Cuánto pesa una persona de 80 kg a una altura igual a 3 radios terrestres?*

Ejercicio 12. Demostrar la validez de la expresión simplificada de la energía potencial:

$Ep_A - Ep_B = mg(h_A - h_B)$ *Señala cuándo se puede aplicar esta expresión.*

Conservación de la energía mecánica.

Independientemente del tipo de fuerzas siempre se cumple:

$$W = Ec_B - Ec_A$$

Si las fuerzas son conservativas:

$$W = Ep_A - Ep_B$$

y podremos escribir: $Ec_B - Ec_A = Ep_A - Ep_B$; $Ec_B + Ep_B = Ec_A + Ep_A$; $Em_B = Em_A$.

La energía mecánica de una partícula que se mueve sometida a fuerzas conservativas, permanece constante (*principio de conservación de la energía mecánica)*

Cuando la partícula está sometida a fuerzas conservativas y disipativas, tendremos:

$$W = \int_A^B \vec{F}_T d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}_C d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}_{NC} d\vec{r}$$

$$Ec_B - Ec_A = Ep_A - Ep_B + W'$$

$$Em_B - Em_A = W'$$

es decir, la variación de su energía mecánica corresponde al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas, *W'*. Por ejemplo, cuando sobre un cuerpo actúa la fuerza de rozamiento , su energía mecánica disminuye en una cantidad igual al trabajo realizado por dicha fuerza (trabajo negativo); hay una transformación de energía mecánica en calorífica.

Ejemplo 13. Un objeto de 145 g se suelta desde una altura de 22 m y se observa que llega al suelo con una velocidad de 9,0 m/s, ¿cuál es la fuerza promedio de la resistencia del aire que actuó sobre él?

Vamos a aplicar la conservación de la energía mecánica al campo gravitatorio.

La energía mecánica de un cuerpo, de masa m, en el campo gravitatorio terrestre, o en cualquier otro campo creado por una masa M, se puede expresar:

$$Em = Ec + Ep = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

y su valor permanece constante siempre que no actúen fuerzas no conservativas.

- Si $Em > 0$ en cierto punto, lo será a lo largo de toda la trayectoria que recorra el cuerpo. Teniendo en cuenta que la energía cinética es positiva y que la energía potencial es negativa, se cumplirá siempre que $Ec > |Ep|$. Como en el infinito la energía potencial es cero, se deduce que en el infinito la Ec > 0, es decir puede llegar al infinito. En definitiva, si un cuerpo posee $Em > 0$ escapará del campo gravitatorio.

- Si $Em = 0$ es porque $Ec = |Ep|$. Como en el infinito $Ep = 0$, se deduce que justo en el infinito la $Ec = 0$. El cuerpo tiene la energía suficiente para llegar al infinito y escapar de la atracción gravitatoria.

$$Em = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{Mm}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

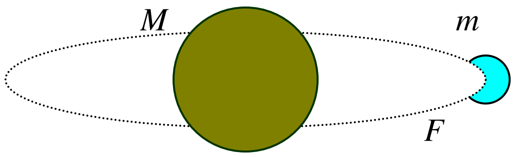
se denomina velocidad de escape. Representa la mínima velocidad que debe poseer un cuerpo para escapar de la acción gravitatoria de M. Como se observa no depende de la masa m del cuerpo que escapa, pero sí de su posición. Para un cuerpo en la superficie terrestre se obtiene un valor de unos 11 kms^{-1}. Aunque la velocidad de escape no depende de la masa del cuerpo que se lance, es evidente que la energía necesaria para comunicarle esa velocidad será mayor en el caso de cuerpos pesados.

Por otra parte, cuanto mayor sea la masa y menor el radio del cuerpo celeste, mayor será la velocidad necesaria para escapar de su atracción. Si la velocidad de escape iguala a la velocidad de la luz el cuerpo se convierte en un agujero negro, materia oscura del universo de la que no escapa la radiación (atraída gravitacionalmente) y cuya existencia se deduce por los efectos gravitacionales sobre otros cuerpos.

- Si la $Em <0$ se cumple que $Ec < |Ep|$. En el infinito como $Ep = 0$ la Ec debería ser menor que cero, algo que no es posible (por contener v^2 la energía cinética siempre es positiva). El cuerpo no llega al infinito y quedará ligado siempre por la acción gravitatoria.

Satélites. Velocidad orbital.

La fuerza que mantiene a un satélite en su órbita, y permite que no escape, es la fuerza gravitatoria. Esta fuerza va cambiando continuamente la dirección del movimiento del satélite y lo mantiene ligado.



Si un satélite de masa m describe una órbita circular alrededor de M se cumple que la fuerza centrípeta, responsable del movimiento circular, es precisamente la fuerza de atracción gravitatoria entre m y M.

$$F = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

expresión que corresponde a la velocidad orbital de un satélite de masa m que gira en órbita circular alrededor de M. No depende de la masa del satélite y es función del radio de la órbita. A menores radios, mayores velocidades.

El periodo de revolución, tiempo que tarda el satélite en completar una vuelta, se puede expresar también en función del radio de la órbita:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \;\Rightarrow\; v^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \;\Rightarrow\; G\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

fórmula que nos recuerda a la 3ª ley de Kepler y que nos permite, por ejemplo, calcular la masa de un planeta conocidos el radio de la órbita y el periodo de revolución de uno de sus satélites.

La energía mecánica de un satélite en su órbita permanece constante, siempre que no se tenga en cuenta el efecto de las fuerzas de fricción. Su valor es:

$$Em = Ec + Ep = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}mG\frac{M}{r} - G\frac{Mm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

La energía mecánica del satélite es negativa como corresponde a un cuerpo ligado por el campo gravitatorio.

¿Cuánta energía se precisa para poner un satélite artificial en órbita?

Es una pregunta frecuente que conviene matizar. Supongamos que desde la superficie terrestre queremos poner en órbita un satélite de masa m a una altura h. La energía necesaria será la diferencia de energía entre:

B: satélite girando alrededor de la Tierra a una altura h, $Em_B = -\frac{GMm}{2(R_T+h)}$

A: satélite en reposo en la superficie terrestre, $Em_A = -\frac{GMm}{R_T}$

El trabajo necesario será igual a la diferencia de energía mecánica entre ambas situaciones: $W = Em_B - Em_A$

Si se tiene en cuenta la rotación de la Tierra, como ocurre en la realidad, el satélite en reposo en la superficie terrestre tendría, también, energía cinética, que habría que añadir en el término de Em_A, que aumentaría, disminuyendo el trabajo necesario. Por ello, los lanzamientos se suelen realizar, en muchos casos, desde puntos cercanos al ecuador terrestre donde la velocidad lineal es mayor.

Ejercicio 14. Desde un punto situado en el ecuador terrestre se desea poner en órbita, a una altura igual al radio terrestre, un satélite de 1000 kg de masa. Determina la energía necesaria si: a) no se tiene en cuenta la rotación de la Tierra; b) se tiene en cuenta la rotación terrestre.

Son miles los satélites artificiales que giran en torno a la Tierra. Se pueden clasificar atendiendo a:

- La misión que realizan: observación terrestre (medio ambiente, meteorología, cartografía), comunicaciones, observación astronómica, militares, estación espacial, navegación, etc.
- La altitud de la órbita: LEO hasta 2000 km, MEO desde 2000 km hasta unos 36000 km y HEO por encima de los 36000 km.
- La excentricidad de la órbita: circulares o elípticas.
- La inclinación de la órbita: desde 0º (plano del ecuador terrestre) hasta 90º (polares).

Un satélite geoestacionario (GEO) es aquél situado en el plano del ecuador terrestre y que tiene un periodo de rotación igual al de la Tierra (24 h), su posición para un observador terrestre es invariable.

Los 24 satélites que ofrecen el sistema GPS están en órbita MEO.

Ejercicio 15. Determina la altura sobre la superficie terrestre a la que se encuentra la órbita geoestacionaria.

Ejercicio 16. Un satélite artificial de 500 kg está en órbita circular a 500 km sobre la superficie terrestre. Determina:
a) Periodo de revolución.
b) Energía mecánica.

c) La energía que absorberá la atmósfera debida al rozamiento, si el satélite cae sobre la superficie terrestre con una velocidad final de 2 km/s.

Caos determinista

La ley de gravitación explica el movimiento de dos cuerpos que se atraen mutuamente. Es una ley determinista, lo que significa que si se conocen las condiciones iniciales de los cuerpos (posiciones y velocidades) podemos conocer con absoluta certeza su comportamiento futuro. Sin embargo, el problema se complica mucho en el caso de tres o más cuerpos que interaccionan mutuamente. Lagrange resolvió el problema de los tres cuerpos imponiendo algunas restricciones y obteniendo soluciones estables (puntos de Lagrange), pero para el caso general la solución no es estable y el sistema se denomina caótico. El caos determinista hace referencia a sistemas dinámicos muy sensibles a las variaciones en la condiciones iniciales, pequeñas variaciones producen grandes diferencias en el comportamiento futuro, aún cuando las leyes que rigen su comportamiento sean completamente deterministas.

Validez de la ley de gravitación de Newton

La ley de gravitación de Newton, que considera la gravedad como el resultado de una fuerza atractiva entre cuerpos, de naturaleza desconocida y que actúa a distancia y de manera instantánea, es válida para el estudio de muchos fenómenos y ha descrito con precisión el movimiento de los cuerpos celestes. Sin embargo, ciertos efectos como las anomalías en la órbita de Mercurio no tenían explicación en el marco de esta teoría. La teoría de la relatividad general de Einstein es la herramienta fundamental en la Astrofísica moderna; una teoría más completa que describe la gravitación como resultado de la curvatura del espacio-tiempo.

PROBLEMAS SOBRE LA INTERACCIÓN GRAVITATORIA

1. Dos masas puntuales m = 10 kg y m’ = 5 kg están situadas en los puntos (0,3) m y (4,0) m, respectivamente.
   a) Dibuje el campo gravitatorio producido por cada una de las masas en el punto A (0,0) m y en el punto B (4,3) m y calcule el campo gravitatorio total en ambos puntos.
   b) Determine el trabajo necesario para desplazar una partícula de 0,5 kg desde el punto B hasta el A. Discuta el signo de este trabajo y razone si su valor depende de la trayectoria seguida.
   $$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}$$

2. Dos masas puntuales de 2500 kg y 1500 kg, respectivamente, se encuentran separadas una distancia de 4 m. Determina:
   a) El módulo de la fuerza gravitatoria entre ellas.
   b) El módulo del campo gravitatorio resultante en el punto medio de la recta que las une. *Sol: 1,56.10^{-5}N; 1,67.10^{-8} N/kg*

3. En el punto (0, 0) hay una masa de 2 kg y en (4, 0) otra de 4 kg. Calcula:
   a) El vector intensidad del campo gravitatorio en (2, 0) y en (0, 3).
   b) La fuerza sobre una masa de 5 kg en los puntos anteriores.
   c) El potencial en los mismos puntos.
   d) El trabajo para transportar 5 kg desde (2, 0) a (0, 3).

4. Dos masas puntuales m_1 = 5 kg y m_2 = 10 kg se encuentran situadas en los puntos (-3, 0) m y (3, 0) m, respectivamente.
   a) Determine el punto en el que el campo gravitatorio es cero.
   b) Compruebe que el trabajo necesario para trasladar una masa m desde el punto A (0, 4) m al punto B (0, -4) m es nulo y explique ese resultado.

5. ¿En qué punto de la línea que une la Tierra y la Luna es nulo el campo gravitatorio debido a ambos cuerpos? Distancia T-L = 3,84.10^{5} km ; M_T = 81 M_L
   Sol: 3,46.10^{5} km

6. Dos partículas de masas m_1 = 2 kg y m_2 = 5 kg están situadas en los puntos P_1(0,2) m y P_2(1,0) m, respectivamente.
   a) Dibuje el campo gravitatorio producido por cada una de las masas en el punto O (0,0) m y en el punto P(1,2) m y calcule el campo gravitatorio total en el punto P.
   b) Calcule el trabajo necesario para desplazar una partícula de 0,1 kg desde el punto O al punto P.

7. Tres masas de 10 kg están en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Halla el potencial gravitatorio y el módulo del campo gravitatorio en el vértice libre.

   $$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}$$

8. a) Determine la densidad media de la Tierra.
   b) ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra la intensidad del campo gravitatorio terrestre se reduce a la tercera parte?
   $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} $R_T = 6370$ km ; $g_0 = 10$ m s^{-2}

9. ¿A qué altura el campo gravitatorio terrestre se reduce a la cuarta parte de su valor en la superficie terrestre? *Sol: $h = R_T$*

10. a) ¿A qué altura sobre la superficie terrestre ascendería un cuerpo lanzado verticalmente con una velocidad de 5 km/s? b) Un objeto es abandonado a una altura de 5000 km sobre la superficie terrestre, ¿con qué velocidad llegará?
    Sol: 1590 km; 7,4 km/s

11. La masa de la Luna es 0,01 veces la de la Tierra y su radio es 0,25 veces el radio terrestre. Un cuerpo, cuyo peso en la Tierra es de 800 N, cae desde una altura de 50 m sobre la superficie lunar.
    a) Determine la masa del cuerpo y su peso en la Luna.
    b) Realice el balance de energía en el movimiento de caída y calcule la velocidad con que el cuerpo llega a la superficie. $g_0 = 10$ m s^{-2}

12. La masa del planeta Júpiter es, aproximadamente, 300 veces la de la Tierra, su diámetro 10 veces mayor que el terrestre y su distancia media al Sol 5 veces mayor que la de la Tierra al Sol.
    a) Razone cuál sería el peso en Júpiter de un astronauta de 75 kg.
    b) Calcule el tiempo que Júpiter tarda en dar una vuelta completa alrededor del Sol, expresado en años terrestres. $g_0 = 10$ m s^{-2} *Sol: 2250 N; 11,2 años*

13. Un meteorito de 1000 kg colisiona con otro, a una altura sobre la superficie terrestre de 6 veces el radio de la Tierra, y pierde toda su energía cinética.
    a) ¿Cuánto pesa el meteorito en ese punto y cuál es su energía mecánica tras la colisión?
    b) Si cae a la Tierra, haga un análisis energético del proceso de caída. ¿Con qué velocidad llega a la superficie terrestre? Razone las respuestas
    $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg. $R_T = 6400$ km.

14. Calcular: a) el trabajo mínimo que hay que realizar para trasladar un cuerpo de 20 kg desde la superficie terrestre hasta una altura igual al radio de la Tierra; b) velocidad con que habría que lanzarlo para alcanzar esa altura.
    Datos: G, M_T, R_T *Sol: $6{,}2.10^8$ J ; 7,9 km/s*

15. a) Explique cualitativamente la variación del campo gravitatorio terrestre con la altura y haga una representación gráfica aproximada de dicha variación.
    b) Calcule la velocidad mínima con la que habrá que lanzar un cuerpo desde la superficie de la Tierra para que ascienda hasta una altura de 4000 km.
    $R_T = 6370$ km ; $g_0 = 10$ m s^{-2}

16. Un satélite describe una órbita circular en torno a la Tierra de radio doble que el terrestre.
    a) Determine la velocidad del satélite y su periodo de rotación.

b) Explique cómo variarían las magnitudes determinadas en a) en los siguientes casos: i) si la masa del satélite fuese el doble; ii) si orbitase en torno a un planeta de masa la mitad y radio igual a los de la Tierra.

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg. $R_T = 6400$ km.

17. El satélite de investigación europeo (ERS-2) sobrevuela la Tierra a 800 km de altura. Suponga su trayectoria circular y su masa de 1000 kg.
a) Calcule de forma razonada la velocidad orbital del satélite.
b) Si suponemos que el satélite se encuentra sometido únicamente a la fuerza de gravitación debida a la Tierra, ¿por qué no cae sobre la superficie terrestre? Razone la respuesta.
$R_T = 6370$ km; $g_0 = 10$ m s^{-2}

18. El satélite Tritón gira alrededor de Neptuno con un periodo de 5,87 días y el radio de su órbita es $3{,}55.10^5$ km. Determina: a) masa de Neptuno; b) peso, en la superficie del citado planeta, de un objeto de 100 kg de masa. Radio de Neptuno = $2{,}40.10^4$ km   *Sol: $1{,}03.10^{26}$ kg ; $1{,}19.10^3$ N*

19. Un satélite artificial de 500 kg gira alrededor de la Luna en una órbita circular situada a 120 km sobre la superficie lunar y tarda 2 horas en dar una vuelta completa.
a) Con los datos del problema, ¿se podría calcular la masa de la Luna? Explique como lo haría.
b) Determine la energía potencial del satélite cuando se encuentra en la órbita citada.
$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} $R_L = 1740$ km

20. Un satélite de 200 kg describe una órbita circular, de radio $R = 4 \bullet 10^6$ m, en torno a Marte.
a) Calcule la velocidad orbital y el período de revolución del satélite.
b) Explique cómo cambiarían las energías cinética y potencial del satélite si el radio de la órbita fuera 2R.
$G = 6{,}67 \bullet 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_{Marte} = 6{,}4 \bullet 10^{23}$ kg

21. Los transbordadores espaciales orbitan en torno a la Tierra a una altura aproximada de 300 km, siendo de todos conocidas las imágenes de astronautas flotando en su interior.
a) Determine la intensidad del campo gravitatorio a 300 km de altura sobre la superficie terrestre y comente la situación de ingravidez de los astronautas.
b) Calcule el período orbital del trasbordador.
$M_T = 6 \bullet 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \bullet 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $R_T = 6{,}4 \bullet 10^6$ m

22. Un satélite del sistema de posicionamiento GPS, de 1200 kg, se encuentra en una órbita circular de radio 3 R_T.
a) Calcule la variación que ha experimentado el peso del satélite respecto del que tenía en la superficie terrestre.
b) Determine la velocidad orbital del satélite y razone si la órbita descrita es geoestacionaria.   *Sol: Disminuye en 8/9; 4,57 km/s, no*
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 6{,}0\cdot10^{24}$ kg ; $R_T = 6400$ km

23. La Luna se encuentra a una distancia media de 384.000 km de la Tierra y su periodo de traslación alrededor de nuestro planeta es de 27 días y 6 horas.
    a) Determine razonadamente la masa de la Tierra.
    b) Si el radio orbital de la Luna fuera 200.000 km, ¿cuál sería su período orbital?

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}$$

24. La masa de Marte es 9 veces menor que la de la Tierra y su diámetro es 0,5 veces el diámetro terrestre.
    a) Determine la velocidad de escape en Marte y explique su significado.
    b) ¿Cuál sería la altura máxima alcanzada por un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba, desde la superficie de Marte, con una velocidad de 720 km h^{-1}?

$$g_0 = 10\ \mathrm{m\ s^{-2}} \quad R_T = 6370\ \mathrm{km}$$

25. Calcule la velocidad de escape para un cuerpo situado en: a) la superficie terrestre; b) a una altura de 2000 km de la superficie. *Sol: 11,2 km/s ; 9,8 km/s*

26. Desde una altura de 5.000 km sobre la superficie terrestre se lanza hacia arriba un cuerpo con una cierta velocidad.
    a) Explique para qué valores de esa velocidad el cuerpo escapará de la atracción terrestre.
    b) Si el cuerpo se encontrara en una órbita geoestacionaria, ¿cuál sería su velocidad?

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}\ ;\ R_T = 6400\ \mathrm{km}\ ;\ M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

27. Se lanza hacia arriba un objeto desde la superficie terrestre con una velocidad inicial de 10^3 ms^{-1}
    a) Comente los cambios energéticos que tienen lugar durante el ascenso del objeto y calcule la altura máxima que alcanza considerando despreciable los rozamientos.
    b) Una vez alcanzada dicha altura, ¿Qué velocidad se debe imprimir al objeto para que escape del campo gravitatorio de terrestre? *Sol: $6{,}45.10^6$ m; 7,98 km/s*

$$R_T = 6400\ \mathrm{km};\quad g_0 = 10\ \mathrm{ms^{-2}}$$

28. Un satélite de $3 \cdot 10^3$ kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de $5 \cdot 10^4$ km de radio.
    a) Determine razonadamente su velocidad orbital.
    b) Suponiendo que la velocidad del satélite se anulara repentinamente y empezara a caer sobre la Tierra, ¿con qué velocidad llegaría a la superficie terrestre? Considere despreciable el rozamiento del aire.

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}};\ M_T = 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}\ ;\ R_T = 6370\ \mathrm{km}$$

29. Un satélite de 200 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra con un periodo de dos horas.
    a) Calcule razonadamente el radio de su órbita.
    b) ¿Qué trabajo tendríamos que realizar para llevar el satélite hasta una órbita de radio doble?

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}};\quad M_T = 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

30. Los agujeros negros se denominan así porque su increíble densidad hace que ni siquiera la luz tenga suficiente velocidad para escapar de su acción gravitatoria. ¿Cuál sería el radio (radio de Schwarzchild) de un agujero negro de diez masas solares? $M_{SOL} = 2.10^{30}$ kg $c = 3.10^8$ m/s *Sol: 29,6 km*

CUESTIONES SOBRE LA INTERACCIÓN GRAVITATORIA

1. Suponga que la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa. a) ¿Aumentaría la intensidad del campo gravitatorio en su nueva superficie? b) ¿Se modificaría sustancialmente su órbita alrededor del Sol?

2. a) Defina los términos "fuerza conservativa" y "energía potencial" y explique la relación entre ambos. b) Si sobre una partícula actúan tres fuerzas conservativas de distinta naturaleza y una no conservativa, ¿cuántos términos de energía potencial hay en la ecuación de conservación de la energía mecánica de esta partícula? ¿Cómo aparece en esta ecuación la contribución de la fuerza no conservativa? Razone las respuestas.

3. Comente las siguientes afirmaciones, razonando si son verdaderas o falsas: a) Existe una función energía potencial asociada a cualquier fuerza. b) El trabajo de una fuerza conservativa sobre una partícula que se desplaza entre dos puntos es menor si el desplazamiento se realiza a lo largo de la recta que los une.

4. Dos satélites idénticos A y B describen órbitas circulares de diferente radio alrededor de la Tierra ($R_A > R_B$). Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿Cuál de los dos tiene mayor energía cinética? b) ¿Si los satélites estuvieran en la misma órbita ($R_A = R_B$) y tuviesen distinta masa ($m_A < m_B$), ¿cuál de los dos se movería con mayor velocidad? ¿Cuál de ellos tendría mayor energía cinética?

5. a) ¿Puede ser negativa la energía cinética de una partícula? ¿Y la energía potencial? En caso afirmativo explique el significado físico de la energía potencial. b) ¿Se cumple siempre que el aumento de energía cinética de una partícula es igual a la disminución de su energía potencial? Justifique las respuestas.

6. Se suele decir que la energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa m situado a una altura h viene dada por $Ep = m\ g\ h$, ¿es correcta esta afirmación? ¿En qué condiciones es correcta dicha fórmula?

7. Sean A y B dos puntos de la órbita elíptica de un cometa alrededor del Sol, estando A más alejado del Sol que B. a) Haga un análisis energético del movimiento del cometa y compare los valores de la energía cinética y potencial en A y en B. b) ¿En cuál de los dos puntos A o B es mayor el módulo de la velocidad? ¿Y el de la aceleración?

8. a) Escriba la Ley de la Gravitación Universal y explique su significado físico. b) Según la Ley de la Gravitación la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste; ¿por qué no caen más deprisa los cuerpos con mayor masa?

9 Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿Puede asociarse una energía potencial a una fuerza de rozamiento? b) ¿Cuál es el significado físico de la variación de la energía potencial de un cuerpo entre dos posiciones?

10. Comente las siguientes frases: a) La energía mecánica de una partícula permanece constante si todas las fuerzas que actúan sobre ellas son conservativas. b) Si la energía mecánica de una partícula no permanece constante es porque una fuerza disipativa realiza trabajo.

11. Como habrá visto alguna vez los astronautas se encuentran en estado de ingravidez cuando salen de la cápsula espacial. a) ¿Por qué no caen hacia la Tierra? b) ¿Es debido a que al no haber aire en el espacio exterior no actúa sobre ellos la gravedad? Explique sus respuestas.

12. Una partícula se mueve en un campo gravitatorio uniforme. ¿Aumenta o disminuye la energía potencial gravitatoria al moverse en la dirección y el sentido de la fuerza ejercida por el campo? ¿Y si se moviera en una dirección perpendicular a dicha fuerza? Razone las respuestas.

13. a) Explique el concepto de velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión. b) ¿Qué ocurriría en la realidad si lanzamos un cohete desde la superficie de la Tierra con una velocidad igual a la velocidad de escape?

14. Demuestre razonadamente las siguientes afirmaciones: a) a una órbita de radio R de un satélite le corresponde una velocidad orbital v característica; b) la masa M de un planeta puede calcularse a partir de la masa m y del radio orbital R de uno de sus satélites.

15. Una partícula de masa m, situada en un punto A, se mueve en línea recta hacia otro punto B, en una región en la que existe un campo gravitatorio creado por una masa M. a) Si el valor del potencial gravitatorio en el punto B es mayor que en el punto A, razone si la partícula se acerca o se aleja de M. b) Explique las transformaciones energéticas de la partícula durante el desplazamiento indicado y escriba su expresión. ¿Qué cambios cabría esperar si la partícula fuera de A a B siguiendo una trayectoria no rectilínea?